Komplexní čísla

Obsah

7. Komplexní čísla

7.1 Algebraický tvar komplexního čísla

1. Vypočtěte:

a) $2+i+2(5+i)$

b) $3(4+2i)-2(-3-i)$

c) $3(4i-3)+(2-5i)6$

d) $2+6i-(5-3i)+3(2-i)$

e) $2(3i-5)+6(i-5)$

f) $(1-i)(3-2i)^2$

g) $(1-i)^2(3-2i)$

h) $[(1+2i)-(3-i)](1-i)^2$

i) $[(1+2i)-(3-i)]^2(1-i)$

Řešení:

a) $2+i+2(5+i)=2+i+10+2i=12+3i$

b) $3(4+2i)-2(-3-i)=12+6i+6+2i=18+8i$

c) $3(4i-3)+(2-5i)6=12i-9+12-30i=3-18i$

d) $2+6i-(5-3i)+3(2-i)=2+6i-5+3i+6-3i=3+6i$

e) $2(3i-5)+6(i-5)=6i-10+6i-30=-40+12i$

f) $(1-i)(3-2i)^2=(1-i)(9-12i+4i^2)=(1-i)(9-12i-4)=(1-i)(5-12i)=$
$=5-12i-5i+12i^2=5-12i-5i-12=-7-17i$

g) $(1-i)^2(3-2i)=(1-2i+i^2)(3-2i)=(1-2i-1)(3-2i)=-2i(3-2i)=-6i+4i^2=$
$=-4-6i$

h) $[(1+2i)-(3-i)](1-i)^2=(-2+3i)(1-2i+i^2)=(-2+3i)(1-2i-1)=(-2+3i)(-2i)=$
$=4i-6i^2=6+4i$

i) $[(1+2i)-(3-i)]^2(1-i)=(-2+3i)^2(1-i)=(4-12i+9i^2)(1-i)=(4-12i-9)(1-i)=$
$=(-5-12i)(1-i)=-5-12i+5i+12i^2=-17-7i$

2. Vypočtěte:

a) $\dfrac{2i+1}{1+i}$

b) $\dfrac{3-2i}{i}$

c) $\dfrac{2+i\sqrt{2}}{2-i\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{5}{2-i}$

e) $\dfrac{3+i}{2-3i}$

f) $(3+i)i+\dfrac{2+i}{3-i}$

g) $(5i-1)\left(2-\dfrac{i+3}{2+i}\right)^{-1}$

Řešení:

a) $\dfrac{2i+1}{1+i}=\dfrac{(2i+1)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i+2+1-i}{1+1}=\dfrac{3+i}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

b) $\dfrac{3-2i}{i}=\dfrac{(3-2i)(-i)}{i(-i)}=\dfrac{-3i+2i^2}{1}=-2-3i$

c) $\dfrac{2+i\sqrt{2}}{2-i\sqrt{2}}=\dfrac{\left(2+i\sqrt{2}\right)\left(2+i\sqrt{2}\right)}{\left(2-i\sqrt{2}\right)\left(2+i\sqrt{2}\right)}=\dfrac{4+4\sqrt{2}\cdot i+2i^2}{4+2}=\dfrac{2+4\sqrt{2}\cdot i}{6}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$

d) $\dfrac{5}{2-i}=\dfrac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{10+5i}{4+1}=\dfrac{10+5i}{5}=2+i$

e) $\dfrac{3+i}{2-3i}=\dfrac{(3+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{6+9i+2i-3}{4+9}=\dfrac{3+11i}{13}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{11}{13}i$

f) $(3+i)i+\dfrac{2+i}{3-i}=3i+i^2+\dfrac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=3i-1+\dfrac{6+2i+3i+i^2}{9+1}=3i-1+\dfrac{5+5i}{10}=$

$=3i-1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}i$

g) $(5i-1)\left(2-\dfrac{i+3}{2+i}\right)^{-1}=(5i-1):\left(2-\dfrac{(i+3)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)=(5i-1):\left(2-\dfrac{2i+1+6-3i}{4+1}\right)=$

$=(5i-1):\left(2-\dfrac{7-i}{5}\right)=(5i-1):\left(2-\dfrac{7}{5}+\dfrac{1}{5}i\right)=\dfrac{5i-1}{\dfrac{3+i}{5}}=\dfrac{5(5i-1)}{3+i}=$

$=\dfrac{(25i-5)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{75i+25-15+5i}{9+1}=\dfrac{10+80i}{10}=1+8i$

3. Vypočtěte:

a) $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+i^{44}$

b) $1+i+i^2+i^3+i^4$

c) $i+i^3+i^5+i^7+i^9$

d) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot i^5$

Řešení:

a) $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+i^{44}=i^4+\left(i^4\right)^3\cdot i^2+\left(i^4\right)^6+\left(i^4\right)^8\cdot i^2+\left(i^4\right)^{11}=1+i^2+1+i^2+1=$

$=1-1+1-1+1=1$

b) $1+i+i^2+i^3+i^4=1+i-1-i+1=1$

c) $i+i^3+i^5+i^7+i^9=i-i+i-i+i=i$

d) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot i^5=i^{1+2+3+4+5}=i^{15}=\left(i^4\right)^3\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i$

7.2 Velikost komplexního čísla

1. Vypočtěte:

a) $|6-2i|$

b) $\left|-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right|$

c) $|4-i\sqrt{3}|$

d) $|5-12i|$

e) $|1+i|$

f) $\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$

g) $|(7+i)(4-3i)|$

h) $\left|\frac{-4-2i}{3-i}\right|$

i) $|(1+i)(2-3i)(2+i)|$

Řešení:

a) $\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ |z|=\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |6-2i|=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

b) $\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ |z|=\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}}=1$

c) $\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ |z|=\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |4-i\sqrt{3}|=\sqrt{4^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{16+3}=\sqrt{19}$

d) $\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ |z|=\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |5-12i|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

e) $\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ |z|=\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

f) $\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ |z|=\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$

g) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

$$|(7+i)(4-3i)|=|7+i|\cdot|4-3i|=\sqrt{7^2+1}\cdot\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{50}\cdot\sqrt{25}=25\sqrt{2}$$

h) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

$$\left|\frac{-4-2i}{3-i}\right|=\frac{|-4-2i|}{|3-i|}=\frac{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}}=\sqrt{2}$$

i) $|(1+i)(2-3i)(2+i)|=|1+i|\cdot|2-3i|\cdot|2+i|=\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}=$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{130}$$

7.3 Kvadratické rovnice v oboru komplexních čísel

7.3.1 Kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

1. Řešte rovnice v oboru komplexních čísel:

a) $x^2-3x+3=0$

b) $2x^2+x+1=0$

c) $3x^2-7x+5=0$

d) $4x^2+3=0$

e) $x^2+x+1=0$

f) $2x^2+3=0$

g) $3x^2-2x+1=0$

h) $5x^2-2x+1=0$

Řešení:

a) $x^2-3x+3=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a} \\ D=(-3)^2-4\cdot1\cdot3=9-12=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

b) $2x^2+x+1=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a} \\ D=1^2-4\cdot2\cdot1=1-8=-7 \end{array}\right\}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{4}=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{4}i$$

c) $3x^2-7x+5=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a} \\ D=(-7)^2-4\cdot3\cdot5=49-60=-11 \end{array}\right\}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{7\pm i\sqrt{11}}{6}=\frac{7}{6}\pm\frac{\sqrt{11}}{6}i$$

d) $4x^2+3=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a} \\ D=-4\cdot4\cdot3=48 \end{array}\right\}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\pm i\sqrt{48}}{8}=\pm\frac{4\sqrt{3}}{8}i=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

e) $x^2+x+1=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a} \\ D=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

f) $2x^2+3=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a} \\ D=-4\cdot2\cdot3=-24 \end{array}\right\}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\pm i\sqrt{24}}{4}=\pm\frac{4\sqrt{6}}{4}i=\pm i\sqrt{6}$$

g) $3x^2-2x+1=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a} \\ D=(-2)^2-4\cdot3\cdot1=4-12=-8 \end{array}\right\}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{8}|}{6}=\frac{2\pm i2\sqrt{2}}{6}=\frac{2\left(1\pm i\sqrt{2}\right)}{6}=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i$$

h) $5x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} \\ D &= (-2)^2 - 4\cdot 5\cdot 1 = 4 - 20 = -16 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{16\,|}}{10} = \frac{2 \pm 4i}{10} = \frac{2(1 \pm 2i)}{10} = \frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}i$$

7.3.2 Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

Kvadratická rovnice s komplexními koeficienty $ax^2 + bx + c = 0$ má v oboru komplexních čísel dva kořeny pro $D \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a},$$

kde α je argument diskriminantu *D*.

2. Vypočtěte:

a) $x^2 + x(2 - i) + 3 - i = 0$

b) $ix^2 - 3x + 4i = 0$

c) $x^2 + (i - 3)x + 2 - 2{,}5i = 0$

d) $x^2 - 6ix - 25 = 0$

e) $x^2 + 3x + 10i = 0$

f) $x^2 - 4 = 3i$

Řešení:

a) $x^2 + x(2 - i) + 3 - i = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

$$D = (2 - i)^2 - 4\cdot 1(3 - i) = 4 - 4i + i^2 - 12 + 4i = -9 = 9(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$x_{1,2} = \frac{(-2 + i) \pm \sqrt{9}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{(-2 + i) \pm 3(0 + i)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + i + 3i}{2} = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$$

$$x_2 = \frac{-2 + i - 3i}{2} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

b) $ix^2 - 3x + 4i = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

$$D = (-3)^2 - 4\cdot i\cdot 4i = 9 + 16 = 25 = 25(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}\left(\cos 0+i\sin 0\right)}{2i}=\frac{3\pm 5}{2i}$$

$$x_1=\frac{3+5}{2i}=\frac{8}{2i}=\frac{8\left(-2i\right)}{2i\left(-2i\right)}=\frac{-16i}{4}=-4i$$

$$x_2=\frac{-2}{2i}=\frac{-2\left(-2i\right)}{2i\left(-2i\right)}=\frac{4i}{4}=i$$

c) $x^2+\left(i-3\right)x+2-2{,}5i=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

$$D=\left(i-3\right)^2-4\cdot\left(2-2{,}5i\right)=i^2-6i+9-8+10i=4i=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_{1,2}=\frac{-i+3\pm\sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{-i+3\pm 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{2}=\frac{-i+3\pm\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$x_1=\frac{-i+3+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=\frac{3+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}i$$

$$x_2=\frac{-i+3-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}+1}{2}i$$

d) $x^2-6ix-25=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

$$D=\left(-6i\right)^2-4\cdot\left(-25\right)=36i^2+100=64=64\left(\cos 0+i\sin 0\right)$$

$$x_{1,2}=\frac{6i\pm\sqrt{64}\left(\cos 0+i\sin 0\right)}{2}=\frac{6i\pm 8\left(1+0i\right)}{2}=\frac{6i\pm 8}{2}$$

$$x_1=4+3i$$

$$x_2=-4+3i$$

e) $x^2+3x+10i=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

$$D=3^2-4\cdot 10i=9-40i=41\left(\frac{9}{41}-\frac{40}{41}i\right)$$

Pomocí goniometrických vztahů určíme

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{9}{41}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{50}{41}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{41}}$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{9}{41}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{32}{41}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{41}}$$

Dosadíme do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}\left(\sqrt{\frac{25}{41}} - i\sqrt{\frac{16}{41}}\right)}{2} = \frac{-3 \pm (5-4i)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3+5-4i}{2} = 1-2i$$

$$x_2 = \frac{-3-5+4i}{2} = -4+2i$$

f) $x^2 - 4 = 3i$

$$x^2 - 4 - 3i = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

$$D = -4(-4-3i) = 16+12i = 20\left(\frac{16}{20} + \frac{12}{20}i\right)$$

Pomocí goniometrických vztahů určíme

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{16}{20}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{36}{20}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{20}}$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{16}{20}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{20}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{20}}$$

Dosadíme do vzorce pro kořeny kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{20}\left(\sqrt{\frac{18}{20}} + i\sqrt{\frac{2}{20}}\right)}{2} = \frac{\pm\left(\sqrt{18} + i\sqrt{2}\right)}{2} = \pm\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$$

$$x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

7.4 Binomická rovnice

$$x^n - |a|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) = 0$$

$$x_k = \sqrt[k]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\dots,n-1$$

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in C$ a kořeny vyjádřete v goniometrickém a v algebraickém tvaru.
   a) $x^3 - 27 = 0$
   b) $x^3 + 27 = 0$
   c) $x^3 - i = 0$
   d) $x^3 + i = 0$
   e) $x^3 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$
   f) $x^3 - 1 - i\sqrt{3} = 0$
   g) $x^6 - 1 + i\sqrt{3} = 0$
   h) $x^6 + \sqrt{3} - i = 0$
   i) $32x^5 - 1 = 0$

Řešení:

a) $x^3 - 27 = 0$

Pro kořeny binomické rovnice $x^n - |a|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) = 0$ platí, že

$x_k = \sqrt[k]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\dots,n-1$. Potom řešíme

$a = 27 = 27\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$.

$$k = 0:\quad x_1 = \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{0}{3} + i\sin\frac{0}{3}\right) = 3\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 3$$

$$k = 1:\quad x_2 = \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{0+2\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2:\quad x_3 = \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{0+4\pi}{3} + i\sin\frac{0+4\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

b) $x^3+27=0$

Rovnici přepíšeme do tvaru $x^3-(-27)=0$. Potom řešíme

$a=-27=27(\cos\pi+i\sin\pi)$.

$$k=0:\quad x_1=\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$k=1:\quad x_2=\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=3(\cos\pi+i\sin\pi)=3(-1+0i)=-3$$

$$k=2:\quad x_3=\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

c) $x^3-i=0$

Řešíme $a=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

$$k=0:\quad x_1=\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$k=1:\quad x_2=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$k=2:\quad x_3=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

d) $x^3 + i = 0$

Rovnici přepíšeme do tvaru $x^3 - (-i) = 0$. Potom řešíme $a = -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

$$k = 0: \quad x_1 = \cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{3} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$k = 1: \quad x_2 = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$k = 2: \quad x_3 = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

e) $x^3 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$

Rovnici přepíšeme do tvaru $x^3 - \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = 0$. Potom řešíme

$a = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$$k = 0: \quad x_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$k = 1: \quad x_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$$

$$k = 2: \quad x_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

Kořeny rovnice lze zapsat ve tvaru

$$x_{1,2,3} = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], \; k = 0,1,2$$

f) $x^3 - 1 - i\sqrt{3} = 0$

Rovnici přepíšeme do tvaru $x^3 - \left(1 + i\sqrt{3}\right) = 0$. Potom řešíme

$$a = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$$k = 0: \quad x_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$k = 1: \quad x_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$$

$$k = 2: \quad x_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$$

Kořeny rovnice lze zapsat ve tvaru

$$x_{1,2,3} = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], k = 0,1,2$$

g) $x^6 - 1 + i\sqrt{3} = 0$

Rovnici přepíšeme do tvaru $x^3 - \left(1 - i\sqrt{3}\right) = 0$. Potom řešíme

$$a = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

$$k=0: \quad x_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{18}+i\sin\frac{5\pi}{18}\right)$$

$$k=1: \quad x_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18}\right)$$

$$k=2: \quad x_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{18}+i\sin\frac{17\pi}{18}\right)$$

$$k=3: \quad x_4=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+6\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+6\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{18}+i\sin\frac{23\pi}{18}\right)$$

$$k=4: \quad x_5=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+8\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+8\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{18}+i\sin\frac{29\pi}{18}\right)$$

$$k=5: \quad x_6=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+10\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+10\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{18}+i\sin\frac{35\pi}{18}\right)$$

Kořeny rovnice lze zapsat ve tvaru

$$x_{1,2,3,4,5,6}=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\right)\right], k=0,1,2,3,4,5$$

h) $x^6+\sqrt{3}-i=0$

Rovnici přepíšeme do tvaru $x^6-\left(-\sqrt{3}+i\right)=0$. Potom řešíme

$$a=-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

$$k=0:\quad x_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{36}+i\sin\frac{5\pi}{36}\right)$$

$$k=1:\quad x_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{36}+i\sin\frac{17\pi}{36}\right)$$

$$k=2:\quad x_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+4\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+4\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{36}+i\sin\frac{29\pi}{36}\right)$$

$$k=3:\quad x_4=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+6\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+6\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{36}+i\sin\frac{41\pi}{36}\right)$$

$$k=4:\quad x_5=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+8\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+8\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{53\pi}{36}+i\sin\frac{53\pi}{36}\right)$$

$$k=5:\quad x_6=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+10\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+10\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{65\pi}{36}+i\sin\frac{65\pi}{36}\right)$$

Kořeny rovnice lze zapsat ve tvaru

$$x_{1,2,3,4,5,6}=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}\right)\right],k=0,1,2,3,4,5$$

i) $32x^5-1=0$

Rovnici přepíšeme do tvaru $x^5-\frac{1}{32}=0$. Potom řešíme $a=\frac{1}{32}=\frac{1}{32}(\cos 0+i\sin 0)$.

$k=0: \quad x_1=\frac{1}{2}(\cos 0+i\sin 0)$

$k=1: \quad x_2=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

$k=2: \quad x_3=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$

$k=3: \quad x_4=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$

$k=4: \quad x_5=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right)$

Kořeny rovnice lze zapsat ve tvaru

$x_{1,2,3,4,5}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right), k=0,1,2,3,4$

j) $3x^6-75=0$

Rovnici přepíšeme do tvaru $x^6-25=0$. Potom řešíme $a=25=25(\cos 0+i\sin 0)$.

$k=0: \quad x_1=\sqrt[3]{5}(\cos 0+i\sin 0)=\sqrt[3]{5}$

$k=1: \quad x_2=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$k=2: \quad x_3=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$k=3: \quad x_4=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{5}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt[3]{5}$

$k=4: \quad x_5=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$k=5: \quad x_6=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Kořeny rovnice lze zapsat ve tvaru

$x_{1,2,3,4,5,6}=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}\right), k=0,1,2,3,4,5$

k) $x^4 - 1 = 0$

Rovnici přepíšeme do tvaru $x^4 - 1 = 0$. Potom řešíme $a = 1 = \cos 0 + i \sin 0$.

$k = 0: \quad x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$k = 1: \quad x_2 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$k = 2: \quad x_3 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$k = 3: \quad x_4 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

l) $x^4 + 1 = 0$

Rovnici přepíšeme do tvaru $x^4 + 1 = 0$. Potom řešíme $a = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

$k = 0: \quad x_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k = 1: \quad x_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k = 2: \quad x_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k = 3: \quad x_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

7.5 Moivreova věta

$$\left[r\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\right]^n=r^n\left(\cos n\alpha+i\sin n\alpha\right)$$

1. Vypočtěte:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{20}$

b) $\left(1+i\right)^6$

c) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$

d) $\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{12}$

Řešení:

a) $$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{20}=\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

b) Komplexní číslo $\left(1+i\right)^6$ převedeme nejprve do goniometrického tvaru a poté umocníme podle vzorce.

$$\left(1+i\right)^6=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6=\sqrt{2}^6\left[\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=2^3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=8\left(0-i\right)=-8i$$

c) Komplexní číslo $\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$ převedeme nejprve do goniometrického tvaru a poté umocníme podle vzorce.

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^5=\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]^5=2^5\left[\cos\left(5\cdot\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{5\pi}{3}\right)\right]=$$

$$=2^5\left(\cos\frac{25\pi}{3}+i\sin\frac{25\pi}{3}\right)=2^5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=32\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16+16\sqrt{3}\cdot i$$

d) Komplexní číslo $\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{12}$ převedeme nejprve do goniometrického tvaru a poté umocníme podle vzorce.

$$-2\sqrt{3}-2i=4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{12}=\left[4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\right]^{12}=4^{12}\left[\cos\left(12\cdot\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(12\cdot\frac{7\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=4^{12}\left(\cos 14\pi+i\sin 14\pi\right)=4^{12}\left(\cos 0+i\sin 0\right)=4^{12}$$

7.6 Gaussova rovina

1. Zobrazte v Gaussově rovině množinu všech čísel, pro která platí:

a) $\left|z-(3+2i)\right|\leq 2$

b) $\left|z+i\right|<\sqrt{2}$

c) $\left|z-2-2i\right|>3$

d) $\left|z-1\right|=2$

e) $\left|\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right|\geq\left|z\right|>\frac{1}{2}$

f) $\left|\frac{3-i}{1+2i}\right|>\left|z\right|$

g) $\left|2+2i\right|\geq\left|z+1+i\right|$

h) $\left|z-3-i\right|=\left|z\right|$

i) $\left|z+2-i\right|=\left|z-2+i\right|$

j) $\left|z+2-i\right|\geq\left|z-2+i\right|$

k) $\left|z-1+2i\right|<\left|z-2-i\right|$

l) $\left|z\right|>\left|z-2-2i\right|$

m) $\left|z+1\right|<2\sqrt{2}$

n) $c<\left|z\right|<d$

o) $\left|z+\frac{i}{1+i}\right|=\left|z-1\right|$

Řešení:

a) $\left|z-(3+2i)\right|\leq 2$

Řešením je množina bodů v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od čísla $3+2i$ je menší nebo rovna 2, tzn. kruh se středem v bodě $3+2i$ a poloměrem 2 včetně hraniční kružnice.

b) $\left|z+i\right|<\sqrt{2}\Rightarrow\left|z-(-i)\right|<\sqrt{2}$

Řešením je množina bodů v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od čísla $-i$ je menší než $\sqrt{2}$, tzn. kruh se středem v bodě $-i$ a poloměrem $\sqrt{2}$ bez hraniční kružnice.

c) $\left|z-2-2i\right|>3 \Rightarrow \left|z-(2+2i)\right|>3$

Řešením je množina bodů v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od čísla $2+2i$ je větší než 3, tzn. doplněk kruhu se středem v bodě $2+2i$ a poloměrem 3 bez hraniční kružnice.

d) $\left|z-1\right|=2$

Řešením je množina bodů v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od čísla 1 je rovna 2, tzn. doplněk kruhu se středem v bodě $2+2i$ a poloměrem 3 bez hraniční kružnice.

e) $\left|\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right| \geq |z| > \frac{1}{2}$

Řešením je množina bodů v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od počátku je menší nebo rovna 1 a zároveň větší než $\frac{1}{2}$, tzn. mezikruží dané kružnicí se středem v počátku a poloměrem 1 včetně hraniční kružnice a kružnicí se středem v počátku s poloměrem $\frac{1}{2}$ bez této kružnice.

f) $\left|\frac{3-i}{1+2i}\right| > |z|$

Vypočítáme absolutní hodnotu na levé straně nerovnice

$$\left|\frac{3-i}{1+2i}\right| = \frac{|3-i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

Řešením je množina bodů v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od počátku je menší než $\sqrt{2}$, tzn. kruh se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{2}$ bez hraniční kružnice.

g) $|2+2i| \geq |z+1+i| \Rightarrow |2+2i| \geq |z-(-1-i)|$

Řešením je množina bodů v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od bodu $(-1-i)$ je menší nebo rovna $|2+2i|$.

$$|2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Řešením je tedy kruh se středem $(-1-i)$ poloměrem $2\sqrt{2}$

h) $|z-3-i|=|z| \Rightarrow |z-(3+i)|=|z|$

Hledáme body, jejichž vzdálenost od bodu $(3+i)$ je stejná jako od počátku soustavy souřadnic. Hledané body leží na ose úsečky s krajními body $(0+0i)$ a $(3+i)$.

i) $|z+2-i|=|z-2+i| \Rightarrow |z-(2+i)|=|z-(2-i)|$

Hledáme body, jejichž vzdálenost od bodu $(-2+i)$ je stejná jako od bodu $(2-i)$.
Hledané body leží na ose úsečky s krajními body $(-2+i)$ a $(2-i)$.

j) $|z+2-i| \geq |z-2+i| \Rightarrow |z-(-2+i)| \geq |z-(2-i)|$

Hledáme body, jejichž vzdálenost od bodu $(-2+i)$ je stejná nebo větší jako od bodu $(2-i)$. Hledané body leží v polorovině s hraniční přímkou, která je osou úsečky s krajními body $(-2+i)$ a $(2-i)$.

k) $|z-1+2i| < |z-2-i| \Rightarrow |z-(1-2i)| < |z-(2+i)|$

Hledáme body, jejichž vzdálenost od bodu $(1-2i)$ je menší než od bodu $(2+i)$. Hledané body leží v polorovině bez hraniční přímky , která je osou úsečky s krajními body $(1-2i)$ a $(2+i)$.

l) $|z| > |z-2-2i| \Rightarrow |z| > |z-(2+2i)|$

Hledáme body, jejichž vzdálenost od bodu 0 je větší jako od bodu $(2+2i)$. Hledané body leží v polorovině bez hraniční přímky , která je osou úsečky s krajními body 0 a $(2+2i)$.

m) $|z+1| < 2\sqrt{2} \Rightarrow |z-(-1)| < 2\sqrt{2}$

Hledáme body, jejichž vzdálenost od čísla -1 je menší než $2\sqrt{2}$, tzn. kruh se středem v bodě -1 poloměrem $2\sqrt{2}$ bez hraniční kružnice.

n) $c < |z| < d$

Hledáme množinu čísel, jejichž absolutní hodnota (vzdálenost od počátku soustavy souřadnic) je menší než *d* a větší než *c*. Řešením je množina bodů v Gaussově rovině, které leží v mezikruží bez hraničních soustředných kružnic, se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměry *c* a *d*.

o) $\left|z+\frac{i}{1+i}\right|=|z-1|$

$$\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+i}{2}\Rightarrow\left|z-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|=|z-1|$$

Hledáme body, jejichž vzdálenost od bodu $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ je stejná jako od bodu 1. Tuto vlastnost mají body na ose úsečky s krajními body $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ a 1.

p) $\left|z-\frac{1-2i}{i}\right|\leq\left|z+\frac{1-2i}{i}\right|$

$$\frac{1-2i}{i}=\frac{(1-2i)(-i)}{i(-i)}=\frac{-2-i}{1}=-2-i$$

$$|z-(-2-i)|\leq|z+(-2-i)|$$

$$|z-(-2-i)|\leq|z-(2+i)|$$

Hledáme body, jejichž vzdálenost od bodu $(-2-i)$ je menší nebo rovna než od bodu $(2+i)$. Tuto vlastnost mají body poloroviny s hraniční přímkou, která je osou úsečky s krajními body $(-2-i)$ a $(2+i)$.